Úlohy 1. kola 50. ročníku fyzikální olympiády. *Kategorie A*

Ve všech úlohách počítejte s tíhovým zrychlením $g = 9{,}81\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$.

1. Vrh kyvadla

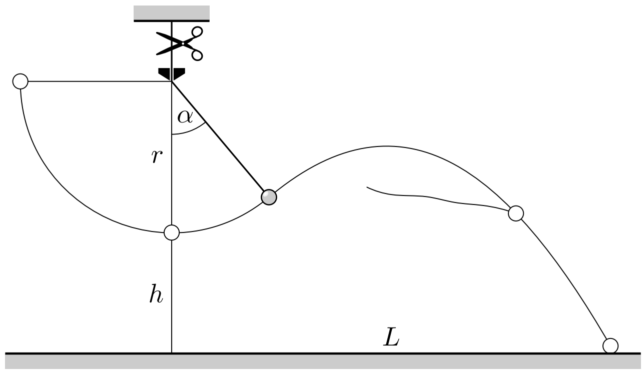
Malá kulička je zavěšena na tenkém neroztažitelném vlákně, které prochází průvlakem (obr. 1). Kuličku s volnou částí vlákna délky $r = 1{,}00$ m vychýlíme do vodorovné polohy a pustíme. Po průchodu kuličky rovnovážnou polohou ve výšce $h = 0{,}80$ m vlákno přestřihneme v okamžiku, kdy se odchýlí od svislého směru o úhel $\alpha = 40°$.

a) Určete vodorovnou vzdálenost L místa dopadu kuličky na podlahu.

b) Určete velikost a směr rychlosti kuličky v okamžiku dopadu.

c) Úlohu a) řešte i pro jiné hodnoty úhlu α. Zjistěte, kdy bude vzdálenost L největší.

Kuličku považujte za hmotný bod, odpor vzduchu zanedbejte. Úloha c) je při použití kalkulačky dosti pracná. Svěřte ji proto počítači, kam do vhodného matematického programu, např. do Excelu, vložíte vzorce odvozené v úloze a).

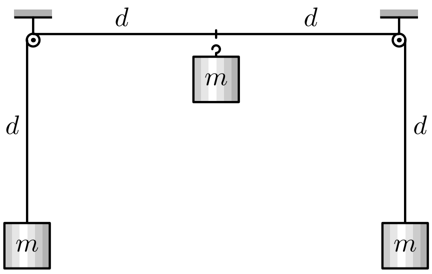


Obr. 1

2. Soustava závaží na vlákně

Přes dvě malé kladky umístěné ve stejné výšce ve vzájemné vzdálenosti $2d$ je nataženo symetricky vlákno délky $4d$, na jehož koncích jsou zavěšena dvě stejná závaží o hmotnosti m. Třetí takové závaží, které zavěsíme s nulovou počáteční rychlostí do středu vlákna (obr. 2), se začne pohybovat dolů, zatímco postranní závaží začnou stoupat. Předpokládejte, že vlákno je neroztažitelné a dokonale ohebné, jeho hmotnost a hmotnosti kladek jsou zanedbatelné, kladky mají zanedbatelné rozměry a tření v jejich ložiskách je nepatrné, odpor vzduchu je zanedbatelný.

a) Jak se bude měnit celková potenciální energie soustavy v závislosti na hloubce h, do které klesne třetí závaží? Počáteční potenciální energii soustavy volte nulovou.
b) V jaké hloubce h_{m} se třetí závaží zastaví a začne se vracet zpět?
c) Po delší době se pohyb soustavy zastaví a závaží se budou nacházet v rovnovážných polohách. Určete hloubku h_0, ve které bude střed vlákna. Ověřte, že v tomto stavu je potenciální energie soustavy minimální a vypočtěte ji.
d) Jak se změní potenciální energie soustavy, vychýlíme-li třetí závaží nepatrně z rovnovážné polohy ve svislém směru do vzdálenosti $\mathrm{d}h$?
Návod: Jestliže spojitá funkce $f(x)$ má v bodě x_0 první derivaci nulovou a druhou nenulovou, můžeme ji v okolí bodu x_0 aproximovat vztahem
$$f(x_0 + \mathrm{d}x) \approx f(x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(\mathrm{d}x)^2 \,.$$
e) Uvolníme-li takto vychýlené třetí závaží, bude soustava konat harmonické kmity. Určete jejich periodu.

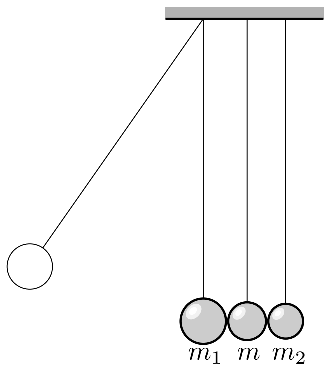


Obr. 2

3. Rázostroj

Krajní koule rázostroje na obr. 3 mají hmotnosti m_1 a m_2, prostřední má hmotnost m. Kouli o hmotnosti m_1 vychýlíme a pustíme. Při návratu do rovnovážné polohy narazí na prostřední kouli o hmotnosti m rychlostí o velikosti v_0 a uvede ji do pohybu. Ta vzápětí narazí do třetí koule o hmotnosti m_2. Oba rázy jsou dokonale pružné.

Označme souřadnice rychlostí levé a prostřední koule po první srážce u_1 a u, souřadnice rychlostí prostřední a pravé koule po druhé srážce w a w_2.



Obr. 3

a) Určete, jakou hmotnost m musí mít prostřední koule, aby při daných hmotnostech m_1 a m_2 byla rychlost pravé koule po druhé srážce co největší.

b) Určete při splnění podmínky a) souřadnice u_1, w a w_2 konečných rychlostí všech koulí po druhé srážce.

c) Určete, jaká část původní kinetické energie levé koule se při splnění podmínky a) přenesla na pravou kouli.

Řešte nejprve obecně, pak pro hodnoty $m_1 = 4{,}50$ kg, $m_2 = 2{,}00$ kg, poté pro vzájemně vyměněné hmotnosti m_1 a m_2.

4. Kruhový děj

V ideálním plynu s jednoatomovými molekulami, jehož látkové množství je n, probíhá kruhový děj, který se skládá z izochorického zahřátí, izotermické expanze, izochorického ochlazení a izotermické komprese. Při izochorickém ohřátí plyn přijme teplo Q_1 a při izotermické expanzi teplo Q_2. Nejnižší teplota plynu během cyklu je T_{min}. Určete

a) maximální teplotu T_{max} plynu během děje,

b) teplo odevzdané plynem při izochorickém ochlazení a při izotermické kompresi,

c) celkovou práci plynu při jednom cyklu,

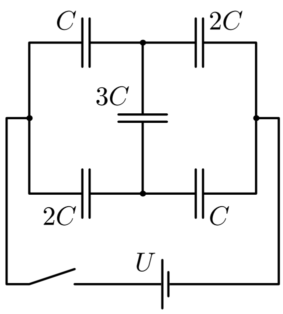
d) teoretickou účinnost tepelného motoru, který by pracoval podle uvedeného cyklu.

5. Soustava kondenzátorů

Ke zdroji o svorkovém napětí U připojíme soustavu nenabitých kondenzátorů podle obr. 4.

a) Jaké napětí vznikne na jednotlivých kondenzátorech po sepnutí spínače?

b) Jaká je celková kapacita soustavy kondenzátorů?

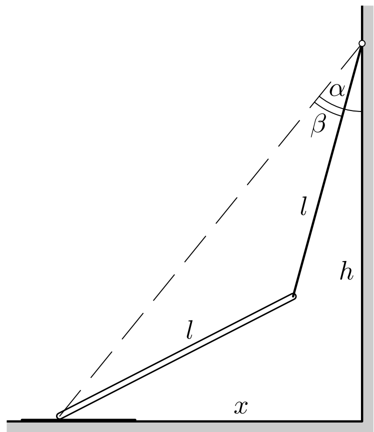


Obr. 4

6. *Praktická úloha:* **Měření součinitele smykového tření mezi koncem dřevěné tyče a podložkami z různých materiálů**

Pomůcky: dřevěná tyč dlouhá 0,5 m až 1 m, provázek, délkové měřidlo, podložky z různých materiálů (papír, guma, skelný papír aj.)

Provedení úlohy:
Na konec tyče délky l přivážeme provázek stejné délky l a jeho konec připevníme na svislou stěnu do výšky h. Druhý konec tyče položíme na podložku ze zkoumaného materiálu, která leží na podlaze, a podložku zvolna posouváme směrem od stěny. V okamžiku, kdy konec tyče začne klouzat po podložce, změříme jeho vzdálenost x od stěny (obr. 5).



Obr. 5

Úkoly:

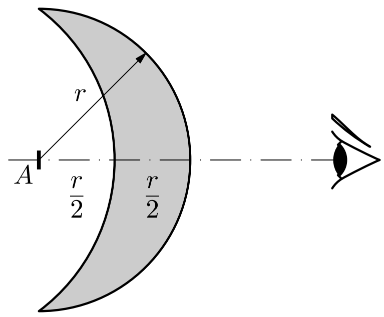
- Úhly α a β vyznačené v obrázku vyjádřete obecně pomocí h a x.
- Dokažte, že součinitel f smykového tření mezi koncem tyče a podložkou můžeme vypočítat pomocí vztahu

$$f = \frac{\sin(\alpha-\beta)\sin(\alpha+\beta)}{\sin 2\beta - \sin(\alpha-\beta)\cos(\alpha+\beta)} = \frac{\cos 2\beta - \cos 2\alpha}{3\sin 2\beta - \sin 2\alpha}\,.$$

- Proveďte měření a výpočty pro různé podložky a pro různé výšky bodu upevnění v intervalu $l < h < 2l$. Získané výsledky posuďte.

7. Tlustá spojka

Čočka vyrobená ze skla o indexu lomu $n = 1{,}5$ je omezena polokoulí o poloměru $r = 5{,}0$ cm a vrchlíkem o výšce $r/2$. Do středu kulové plochy o poloměru r umístíme malý předmět a díváme se na něj ve směru optické osy čočky (obr. 6). Kde se nachází obraz předmětu vytvořený čočkou a jaké je jeho příčné zvětšení?
Před řešením úlohy doporučujeme prostudovat studijní text *J. Trnka: ZOBRAZENÍ ČOČKAMI* (knihovnička FO č. 70)



Obr. 6