Úlohy 1. kola 51. ročníku fyzikální olympiády. *Kategorie D*

Ve všech úlohách počítejte s tíhovým zrychlením $g = 9{,}81\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$.

1. Průměrná rychlost

Na regionální železniční trati délky $s = 48$ km projel vlak první čtvrtinu trati průměrnou rychlostí $v_1 = 60\ \mathrm{km \cdot h^{-1}}$, zbývající část trati průměrnou rychlostí $v_2 = 36\ \mathrm{km \cdot h^{-1}}$. Při zpáteční jízdě projel zmíněnou čtvrtinu trati stejnou průměrnou rychlostí $v'_1 = v_1 = 60\ \mathrm{km \cdot h^{-1}}$, přičemž jeho průměrná rychlost na celé trati byla $v'_\mathrm{p} = 45\ \mathrm{km \cdot h^{-1}}$.

a) Vypočtěte průměrnou rychlost v_p vlaku na celé trati při první jízdě.

b) Vypočtěte průměrnou rychlost vlaku v'_2 na delším úseku trati při zpáteční jízdě.

c) Obě úlohy lze vyřešit obecně, aniž budeme znát délku trati s. Proveďte toto obecné řešení a poté dosazením číselných hodnot rychlostí ze zadání předchozí číselné výsledky ověřte.

2. Dvě tramvaje

Ve stanici stály za sebou dvě tramvaje. První se začala rozjíždět se zrychlením $1{,}2\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$, druhá se začala rozjíždět o 4 s později se zrychlením $1{,}5\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$. Obě tramvaje, jakmile dosáhly rychlosti o velikosti $12\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$, pohybovaly se dále rovnoměrným pohybem. Před následující stanicí začaly obě tramvaje současně brzdit a pohybovaly se rovnoměrně zpomaleným pohybem. První tramvaj měla brzdnou dráhu 54 m. Po zastavení stály obě těsně za sebou jako v předchozí stanici. Vzdálenost mezi stanicemi je 594 m.

a) Proveďte potřebné výpočty a sestrojte graf závislosti rychlostí obou tramvají na čase.

b) Z grafu určete maximální vzdálenost mezi tramvajemi během jízdy.

3. Brzdění automobilu

Nákladní automobil o hmotnosti $m_0 = 5{,}00$ t veze na korbě železobetonový blok tvaru kvádru o hmotnosti $m = 3{,}00$ t rychlostí o velikosti $v_0 = 6{,}0\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$. Mezi blokem a předním čelem korby je mezera délky $d = 1{,}6$ m. Začne-li automobil brzdit stálou silou, zastaví se v čase $t = 12$ s od začátku brzdění. Nyní předpokládejme, že se blok během rovnoměrného pohybu automobilu na korbě zcela uvolní a že se po korbě může pohybovat bez tření. Automobil poté začne brzdit stejnou silou až do úplného zastavení.

a) Určete velikost a zrychlení automobilu s upevněným blokem a velikost a_1 zrychlení automobilu během pohybu bloku na korbě.

b) Určete čas t_1, měřený od začátku brzdění, v němž dojde k nárazu bloku na čelo korby.
c) Určete velikost v_1 rychlosti automobilu bezprostředně před nárazem a velikost v_2 rychlosti automobilu bezprostředně po nárazu. Předpokládejte, že náraz je dokonale nepružný.
d) Sestrojte graf závislosti rychlosti na čase pro oba případy a z grafu určete obě brzdné dráhy automobilu.

4. Tyč s kuličkami

Tyč zanedbatelné hmotnosti a délky l je zavěšena na svém konci. Na druhém konci je umístěna kulička zanedbatelných rozměrů a o hmotnosti m.

a) Tyč vychýlíme do vodorovné polohy a uvolníme. Určete velikost v rychlosti kuličky při jejím průchodu nejnižší polohou.
b) Do středu tyče přidáme kuličku stejné hmotnosti. Tyč s oběma kuličkami opět vychýlíme do vodorovné polohy a uvolníme. Určete velikost v_1 rychlosti původní kuličky a velikost v_2 rychlosti přidané kuličky při průchodu nejnižší polohou.
c) Určete v úlohách a), b) velikost výsledné síly, kterou působí tyč na osu otáčení při průchodu rovnovážnou polohou.

5. Trestné kopy

V průběhu fotbalového zápasu se třikrát kopal trestný kop ze vzdálenosti 22,0 m před brankou. Hráči soupeře vždy postavili ve vzdálenosti 9,15 m od míče zeď, jejíž výška byla 1,80 m. Fotbalista Adámek kopnul míč počáteční rychlostí $v_{0\mathrm{A}} = 24\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$ pod elevačním úhlem $\alpha_\mathrm{A} = 18°$, fotbalista Beneš počáteční rychlostí $v_{0\mathrm{B}} = 25\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$ pod elevačním úhlem $\alpha_\mathrm{B} = 16°$ a fotbalista Cába počáteční rychlostí $v_{0\mathrm{C}} = 26\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$ pod elevačním úhlem $\alpha_\mathrm{C} = 14°$, Žádný z míčů brankář ani jiný fotbalista mimo zeď během letu nezasáhl.

a) Rozhodněte, kteří fotbalisté vstřelili gól.
b) Určete dobu letu míče, který nezasáhl zeď, k brance.
c) Určete maximální výšku každého míče, který nezasáhl zeď, a místo, kde této výšky dosáhl.

Vnitřní výška branky $h = 2{,}44$ m, průměr míče $d = 0{,}22$ m. Odpor vzduchu a rotaci míče zanedbejte. Rovina trajektorie míče je kolmá k brankové čáře.

6. *Praktická úloha:* **Studium funkční závislosti**

Každé těleso, které zavěsíme otáčivě okolo vodorovné osy neprocházející těžištěm a z této rovnovážné polohy vychýlíme, začne po uvolnění kmitat —

vznikne tzv. fyzické kyvadlo. Pokud výchylka kyvadla z rovnovážné polohy je malá, pak doba každého kmitu neboli perioda nezávisí na výchylce. To znamená, že u každého kyvadla naměříme periodu stejnou, ať je výchylka např. 2° nebo 4°. Naopak při velké výchylce, např. 45°, naměříme periodu poněkud větší. Jako fyzické kyvadlo použijeme desku nepravidelného tvaru z překližky, kartonu apod., která se nesmí prohýbat.

Úkoly:

a) Najděte polohu těžiště desky podepřením v jednom bodě ve vodorovné poloze. Polohu těžiště na desce vyznačte.

b) Vyvrtejte otvor mimo těžiště a desku v tomto otvoru zavěste na vodorovnou tenkou tyčku. Orientačně ověřte skutečnost, že perioda malých kmitů (s úhlovou výchylkou např. do 10°) téměř na této úhlové výchylce nezávisí a že perioda s velkou úhlovou výchylkou (např. kolem 45°) je nepatrně větší.

c) Vyvrtejte dalších 5 malých otvorů ve stejné vzdálenosti r a v různých směrech od těžiště. Postupně desku v těchto otvorech zavěste, změřte dobu, za kterou proběhne několik malých kmitů desky a vypočtěte periodu T kmitů. Ze získaných výsledků udělejte závěr.

Číslo měření	1	2	3	4	5	6
r/cm						
T/s						

d) Vyvrtejte 12 dalších malých otvorů v různých vzdálenostech od těžiště, od malé až k maximální možné. Změřte stejně jako v úloze c) dobu několika malých kmitů. Pro každou vzdálenost proveďte 3 měření. Výsledky měření zapište do tabulky (r vzdálenost, N počet kmitů, t doba N kmitů, T průměrná perioda):

Číslo měření	$\frac{r}{\mathrm{cm}}$	N	$\frac{t_1}{\mathrm{s}}$	$\frac{t_2}{\mathrm{s}}$	$\frac{t_3}{\mathrm{s}}$	$\frac{T=\frac{t_1+t_2+t_3}{N}}{\mathrm{s}}$
1						
2						
3						
⋮						

e) Sestrojte graf závislosti periody kmitů na vzdálenosti od těžiště a zformulujte závěr. Graf vytvořte počítačem (např. v excelu), nebo ručně na milimetrový papír. V případě excelu si vytvořte tabulku jako v návodu, zapište do ní naměřené údaje a v posledním sloupci proveďte výpočet periody pomocí vložené funkce. Kurzorem označte dvojici sloupců s daty a vložte *Graf*. Volte typ grafu *XY bodový*, podtyp *bodový* (tj. bez spojnic datových bodů) — zobrazí se soustava izolovaných bodů. Po kliknutí pravým tlačítkem myši na libovolný z nich z nabídky zvolte *Přidat spojnici trendu*, dále typ trendu — *polynomický*, *stupeň 6*. Tím se zobrazí plynulá křivka, která proloží zobrazené body v grafu.

7. Měsíce Jupitera

Rok 2009 je Mezinárodním rokem astronomie. Před 400 lety, v roce 1609, zformuloval německý astronom Johannes Kepler působící v královských službách císaře Rudolfa II. v Praze svůj první a druhý zákon o pohybu planet.

V dalším roce 1610 objevil italský astronom Galileo Galilei při jednom z prvních pohledů na oblohu dalekohledem čtyři největší Jupiterovy měsíce Io, Europa, Ganymed a Kallisto. Tomuto tématu je věnována následující úloha.

Měsíc Io obíhá kolem planety Jupiter s periodou $T_{\mathrm{Io}} = 1{,}77$ d, měsíc Europa s periodou $T_{\mathrm{Eu}} = 3{,}55$ d. Měsíc Kallisto se nachází ve střední vzdálenosti od středu Jupitera $r_{\mathrm{Ka}} = 1{,}883 \cdot 10^6$ km a má dobu oběhu $T_{\mathrm{Ka}} = 16{,}69$ d. Největší měsíc Jupitera (a zároveň největší měsíc ve sluneční soustavě) Ganymed má střední vzdálenost od středu Jupitera $r_{\mathrm{Ga}} = 1{,}070 \cdot 10^6$ km. Trajektorie všech čtyř měsíců leží téměř v téže rovině a lze je s dostatečnou přesností považovat za kružnice.

a) Určete periodu T_{Ga} oběhu měsíce Ganymed.

b) Určete střední vzdálenosti r_{Io}, r_{Eu} od středu Jupitera měsíců Io a Europa.

c) Rozhodněte, který z měsíců má největší velikost obvodové rychlosti a vypočtěte ji.

d) Určete minimální vzájemnou vzdálenost $d_{\min}$ a maximální vzájemnou vzdálenost $d_{\max}$ měsíců Ganymed a Kallisto a dobu Δt, za kterou se oba měsíce z jedné pozice do druhé přemístí.

e) Z vybraných údajů v zadání určete hmotnost M Jupitera.

Řešte nejprve obecně, pak pro dané číselné hodnoty. Gravitační konstanta je $\varkappa = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{N \cdot m^2 \cdot kg^{-2}}$.