

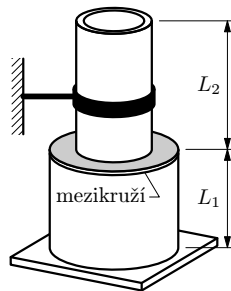
Úlohy 1. kola 55. ročníku fyzikální olympiády. Kategorie C

Ve všech úlohách počítejte s tíhovým zrychlením $g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.

1. Nádoba z trubek

Dva zbytky trubek různých délek L_1 a L_2 a různých vnitřních průřezů S_1 a S_2 , odříznuté kolmo k ose, byly svařeny s mezikruží z tenkého plechu tak, aby měly společnou osu. Takto vzniklá nádoba byla upevněna vertikálně, širší část dole (obr. 1). Zespoda je k nádobě přitlačována záklopka. Aby záklopka neodpadla, musí na ni zdola působit síla o velikosti nejméně F_0 . Když do nádoby nalijeme vodu o objemu V_0 , zvýší se minimální síla potřebná k udržení záklopky na dvojnásobek. Když přidáme znovu vodu o objemu V_0 , zvýší se síla potřebná k udržení záklopky opět na dvojnásobek, tedy na $4F_0$. Když pak přidáme ještě vodu o objemu $3/8V_0$, zvětší se minimální síla potřebná k udržení záklopky o F_0 a nádoba bude plná.

- Jaký je poměr průřezů trubek $S_1 : S_2$?
- Jaký je poměr délek trubek $L_1 : L_2$?
- Vodu vylijeme, nádobu obrátíme a zespodu opět přitlačíme záklopku o stejné hmotnosti stejnou minimální silou. Jak se změní minimální síla, kterou musíme záklopku přidržovat, přidáme-li vodu o objemu V_0 , znovu o objemu V_0 a po doplnění nádoby po horní okraj?



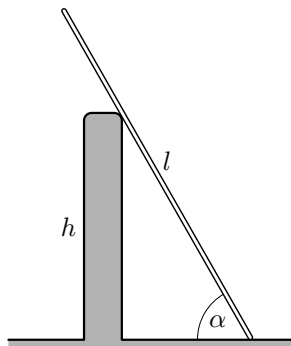
Obr. 1

2. Lať opřená o zeď

Lať o délce l a hmotnosti m je opřena o zeď výšky $h = 0,6l$ tak, že s vodorovnou rovinou svírá úhel α (obr. 2). Těžiště latě je uprostřed, horní konec latě přesahuje přes zeď. Horní konec zdi je hladký, takže mezi ním a latí nevzniká tření.

- Určete velikost a směr síly, kterou lať působí dolním koncem na vodorovnou rovinu.
- Jaký musí být součinitel f smykového tření mezi dolním koncem lati a vodorovnou rovinou, aby lať nesklouzla dolů?

Řešte nejprve obecně, pak pro hodnoty $m = 12 \text{ kg}$, $\alpha = 60^\circ$.



Obr. 2

3. Brzdění automobilů

Osobní automobil pohybující se rychlostí $v_1 = 72 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ dojíždí nákladní automobil pohybující se rychlostí $v_2 = 54 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$. V okamžiku, kdy se nachází

ve vzdálenosti $L = 15$ m za nákladním automobilem, začne brzdit se zrychlením o velikosti $a = 2,5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.

- Na jakou minimální vzdálenost l_{\min} se automobily přiblíží?
- Jakou nejvyšší rychlostí $v_{1\text{m}}$ může jet osobní automobil před začátkem brzdění, aby nedošlo ke srážce?
- Jak se změní výsledky a) a b), začne-li nákladní automobil brzdit současně s osobním automobilem, ale může brzdit jen se zrychlením o velikosti $a/2$?

Řešte nejprve obecně, pak pro dané hodnoty.

4. Kulička ve vagónu

Vagón tažený lokomotivou se začal z klidu rozjíždět po přímých vodorovných kolejích rovnoměrně zrychleným pohybem. Pozorovatel ve vagónu zjistil, že mezi přední a zadní stěnou vagónu je vzdálenost $l = 18,0$ m a že malá plná homogenní kulička, která se na počátku nacházela u přední stěny vagónu, během rozjíždění přejela za dobu $t = 12,0$ s k zadní stěně. Po nepružném nárazu na zadní stěnu se neodrazila a zůstala na místě.

- Určete velikost a_0 zrychlení vagónu.
- Určete dráhu s ujetou vagónem během pohybu kuličky ve vagónu.
- Určete velikost v_1 rychlosti kuličky vzhledem k zemi bezprostředně před nárazem a velikost v_2 rychlosti kuličky vzhledem k zemi bezprostředně po nárazu.

Řešte nejprve obecně, pak pro dané číselné hodnoty. Valivý odpor a odpor vzduchu při pohybu kuličky zanedbejte. Moment setrvačnosti koule je $\frac{2}{5}mr^2$.

5. Ohřev vody

Ve varné konvici s užitečným tepelným výkonem $P = 2000$ W uvedeme do varu vodu o hmotnosti $m = 1,00$ kg. Voda nalévaná do konvice má vždy počáteční teplotu $t_0 = 20$ °C. V průběhu ohřívání občas zjistíme, že k uvaření čaje či kávy potřebujeme více nebo naopak méně vody, než jsme původně do varné konvice nalili. Uvažujme tři režimy ohřívání:

- Vodu o hmotnosti $m = 1,00$ kg uvedeme do varu najednou.
- Nejprve dáme do konvice vodu o hmotnosti $m_1 = 0,60$ kg, po dosažení teploty $t_1 = 70$ °C přidáme vodu o hmotnosti $m_2 = 0,40$ kg.
- Nejprve dáme do konvice vodu o hmotnosti $m_0 = 1,40$ kg, po dosažení teploty $t_1 = 70$ °C odlijeme vodu o hmotnosti $m_2 = 0,40$ kg.

Sestrojte do jednoho obrázku grafy závislosti teploty vody v konvici na čase pro jednotlivé režimy ohřívání.

Měrná tepelná kapacita vody je $c = 4200 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$, teplota varu vody $t_v = 100$ °C. Únik tepla do okolí zanedbáváme.

6. Praktická úloha: Studium modelu plynu v nádobě

Úloha navazuje na článek 1.5 v učebnici Bartuška, K., Svoboda, E.: Fyzika pro gymnázia. Molekulová fyzika a termika. Pozorně jej prostudujte.

Mějme nádobu, kterou symbolicky rozdělíme na dvě části stejného vnitřního objemu. Do nádoby napustíme plyn s počtem N částic stejného druhu a budeme v náhodně vybraných okamžicích zjišťovat počet N_1 částic v levé polovině nádoby a počet N_p částic v pravé polovině nádoby ($N_1 + N_p = N$). Provedeme simulační experiment s náhodným rozdělením 7 částic v levé a v pravé polovině nádoby.

Úkoly:

a) Rozdělení 7 částic budete simulovat házením 7 stejných mincí. Předem dohodou stanovíme, že dopad konkrétní mince lícem nahoru bude znamenat okamžitý výskyt částice v levé polovině nádoby a dopad rubem nahoru bude znamenat okamžitý výskyt částice v pravé polovině nádoby. Všech 7 mincí vezmeme do dlaní, důkladně protřepeme a hodíme na vodorovnou ohraničenou plochu. Po dopadu zjistíme počet N_1 mincí, které dopadly lícem navrch a počet N_p mincí, které dopadly rubem navrch. Výsledek pokusu, tj. rozdělení na N_1 a N_p , zaznamenáme čárkou v příslušném řádku 2. sloupce tabulky. Takto provedeme nejméně 220 pokusů. Poté zapíšeme počty čárek v jednotlivých políčkách. V 3. sloupci spočteme změřenou pravděpodobnost, tj. poměr počtu konkrétního stavu a celkového počtu pokusů, výsledek vyjádříme desetinným číslem zaokrouhleným na 3 platné číslice. V posledních dvou sloupcích uvedeme výsledky teoretické pravděpodobnosti, tj. poměr předpokládaného počtu stavů s daným rozdělením a počtu stavů všech možných rozdělení. Tento teoretický rozbor až pro 4 částice je uveden ve zmíněné učebnici.

$N_1 - N_p$	Změřený počet stavů	Změřená pravděpodobnost	Teoretická pravděpodobnost	
	Čárky – počet	Desetinné číslo (3 platné číslice)	Zlomek	Desetinné číslo (3 platné číslice)
0 – 7				
1 – 6				
2 – 5				
3 – 4				
4 – 3				
5 – 2				
6 – 1				
7 – 0				
Součet				

b) Sestrojte v Excelu sloupcové grafy závislosti změřené a teoretické pravděpodobnosti rozdělení na počtu částic ve zvolené (levé) polovině nádoby (oba grafy v jednom obrázku).

Statistika, kterou vyšetřujeme, patří mezi *binomická rozdělení*. Teoretická pravděpodobnost, že ve zvolené polovině nádoby bude K částic z celkového počtu N , je

$$p(K, N) = \frac{\binom{N}{K}}{2^N} = \frac{N \cdot (N - 1) \cdot (N - 2) \cdot \dots \cdot (N - K)}{2^N \cdot 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot K}.$$

V Excelu ji můžeme vypočítat pomocí statistické funkce BINOMDIST, kam jako parametry dosadíme K ; N ; 0,5; 0. Chceme-li například vypočítat rozdělení pravděpodobnosti pro $N = 100$, použijeme tabulku podle obr. 3. Do prvního sloupce vložíme čísla od 0 do 100 a do buňky B2 funkci BINOMDIST s parametry A2; 100; 0,5; 0 (obr. 3a). Druhý sloupec pak vypočítáme posouváním vyplňovacího táhla (obr. 3b). Z vyplněné tabulky pak vytvoříme *xy bodový graf*.

B2		fx =BINOMDIST(A2;100;0,5;0)			
	A	B	C	D	E
1	K	P			
2	0	7,88861E-31			
3	1				
4	2				
5	3				

Obr. 3a

B5		fx =BINOMDIST(A5;100;0,5;0)			
	A	B	C	D	E
1	K	P			
2	0	7,88861E-31			
3	1	7,88861E-29			
4	2	3,90486E-27			
5	3	1,27559E-25			

Obr. 3b

- c) Vyšetřete rozdělení teoretické pravděpodobnosti pro různá N a výsledky porovnejte. Zformulujte závěr, který vyplývá pro skutečné, tj. obrovské soubory částic (řádově 10^{23}).

7. Lyžař

Lyžařskou sjezdovou dráhu můžeme modelovat nakloněnou rovinou o stálém úhlu sklonu $\alpha = 17,5^\circ$ k vodorovné rovině. Mezi nadmořskou výškou startu a cíle je rozdíl $h = 630$ m. Na startu je připraven závodník o hmotnosti $m = 80$ kg. Součinitel smykového tření mezi skluznicí a svahem je $f = 0,070$. Aerodynamické vlastnosti lyžaře charakterizuje odporový součinitel $C = 0,70$ a obsah řezu kolmého ke směru pohybu $S = 0,70$ m². Hustota vzduchu je $\rho = 1,25$ kg · m⁻³.

- Určete, s jakým zrychlením by se lyžař pohyboval, jaké rychlosti by dosáhl v cíli a jak dlouho by jel po této dráze, kdyby na něj nepůsobily žádné odporové síly.
- Zjistěte, zda samotné smykové tření podstatně ovlivní výsledky z úlohy a).
- Při větších rychlostech se při jízdě výrazně projeví vliv odporu vzduchu. Stanovte, jaké největší rychlosti lyžař dosáhne, a odhadněte, jak dlouho by jízda trvala, kdyby ji skoro celou absolvoval touto rychlostí.

Úlohu řešte nejprve obecně a pak pro dané hodnoty.