Řešení úloh okresního kola 57. ročníku Fyzikální olympiády

Kategorie E

Autor úloh: J. Jírů

FO57E2–1: Dřevěná houpačka

Označme délku fošny $l = 4{,}2\,\mathrm{m}$, hmotnost fošny $m = 18\,\mathrm{kg}$, hmotnost Michala $m_1 = 40\,\mathrm{kg}$, hmotnost Petrušky $m_2 = 25\,\mathrm{kg}$.

a) Označme dále x vzdálenost Michala od konce fošny. Těžiště fošny je v ose (přesněji nad osou) otáčení, moment tíhové síly fošny je proto nulový. V rovnováze se musí rovnat momenty tíhových sil obou dětí

$$m_1 g \left(\frac{l}{2} - x\right) = m_2 g \frac{l}{2}.$$

Z rovnice plyne

$$x = \frac{m_1 - m_2}{2m_1} l = \frac{40\,\mathrm{kg} - 25\,\mathrm{kg}}{2 \cdot 40\,\mathrm{kg}} \cdot 4{,}2\,\mathrm{m} \doteq 0{,}79\,\mathrm{m}.$$

3 body

b) Označme m_2' hledanou hmotnost. Těžiště fošny a tedy střed fošny nyní leží ve vzdálenosti 1/6 délky fošny od osy otáčení, moment tíhové síly fošny je $mgl/6$. V rovnováze platí

$$m_1 g \frac{l}{3} = mg \frac{l}{6} + m_2' g \frac{2l}{3}.$$

Z rovnice získáváme

$$m_2' = \frac{m_1}{2} - \frac{m}{4} = \frac{40\,\mathrm{kg}}{2} - \frac{18\,\mathrm{kg}}{4} = 15{,}5\,\mathrm{kg}.$$

3 body

c) Označme x' hledanou vzdálenost. Nyní je moment tíhové síly fošny $mg\,(l/2 - x')$. V rovnováze je splněna rovnice

$$m_1 g x' = m_2 g\,(l - x') + mg \left(\frac{l}{2} - x'\right),$$

z níž plyne

$$x' = \frac{m_2 + \dfrac{m}{2}}{m_1 + m_2 + m} l = \frac{25\,\mathrm{kg} + \dfrac{18\,\mathrm{kg}}{2}}{40\,\mathrm{kg} + 25\,\mathrm{kg} + 18\,\mathrm{kg}} \cdot 4{,}2\,\mathrm{m} \doteq 1{,}72\,\mathrm{m}.$$

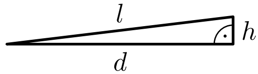
4 body

FO57E2–2: Automobil jede do kopce

Označme $m = 1\,300\,\mathrm{kg}$ hmotnost automobilu, $t_1 = 8\,\mathrm{min} = 480\,\mathrm{s}$ čas pohybu po vodorovné rovině, $t_2 = 4\,\mathrm{min} = 240\,\mathrm{s}$ čas pohybu do kopce a $P_0 = 11\,\mathrm{kW} = 11\,000\,\mathrm{W}$ výkon automobilu.

a) Z grafu určíme rychlost – např. za 10 min urazí vzdálenost 12 km, za hodinu tedy 72 km, tj. pohybuje se rychlostí $v = 72\,\mathrm{km/h} = 20\,\mathrm{m/s}$. Automobil jedoucí rovnoměrným pohybem po vodorovné silnici spotřebuje svůj výkon na překonávání odporu vzduchu. Při rovnoměrném pohybu je odporová síla stejná jako tahová síla motoru a platí pro ni

$$F_0 = \frac{P_0}{v} = \frac{11\,000\,\mathrm{W}}{20\,\mathrm{m/s}} = 550\,\mathrm{N}. \qquad \textbf{2 body}$$



Obr. 1: Výška a délka trasy při stoupání

b) Podle obr. 1 najdeme vztah mezi vzdáleností ujetou při stoupání l a výškou h. Ve fyzikálních úlohách s nakloněnou rovinou chápeme stoupání jako podíl $h/l = 12\,\% = 0{,}12$ a pro výšku tak dostáváme $h = 0{,}12l$. Při jízdě do kopce se výkon navíc využívá na zvětšování polohové energie automobilu. Kromě odporové síly působí proti pohybu i síla rovnoběžná s nakloněnou rovinou (složka tíhové síly působící na automobil)

$$F = mg\frac{h}{l} = 1\,300\,\mathrm{kg}\cdot 10\,\mathrm{N/kg}\cdot 0{,}12 = 1\,560\,\mathrm{N}.$$

Celkový výkon pak je

$$P = P_0 + Fv = 11\,000\,\mathrm{W} + 1\,560\,\mathrm{N}\cdot 20\,\mathrm{m/s} = 42{,}2\,\mathrm{kW}. \qquad \textbf{3 body}$$

Poznámka: V matematice a zeměpise je stoupání definováno nikoliv přes vzdálenost l měřenou podél silnice, ale pomocí vzdálenosti d měřené kolmo na vrstevnice. Podle této definice stoupání pak platí

$$\frac{h}{d} = 0{,}12, \qquad \frac{h}{0{,}12} = d.$$

Podle Pythagorovy věty dále získáváme

$$l^2 = d^2 + h^2 = \frac{h^2}{0{,}12^2} + h^2 = \frac{1.0144}{0{,}0144}h^2, \qquad \Longrightarrow \qquad h = \sqrt{\frac{0{,}0144}{1{,}0144}}\,l \doteq 0{,}12l.$$

Vzhledem k tomu, že rozdíl mezi hodnotami $\sin\alpha$ a $\operatorname{tg}\alpha$ je pro malé úhly velmi malý a v číselném výsledku se po zaokrouhlení neprojeví, doporučujeme uznat i tento postup.

c) Automobil urazil do kopce dráhu

$$l = vt_2 = 20\,\mathrm{m/s}\cdot 240\,\mathrm{s} = 4\,800\,\mathrm{m}.$$

Při daném stoupání 12 % je dosažená výška $h = 0{,}12l = 0{,}12 \cdot 4\,800\,\mathrm{m} = 576\,\mathrm{m}$. Nadmořská výška automobilu v cíli je

$$h' = 310\,\mathrm{m} + 576\,\mathrm{m} = 886\,\mathrm{m}.$$ **3 body**

d) Celková práce je určena součtem práce nutné k překonávání odporové síly po celou dobu jízdy a získané polohové energie automobilu

$$W = P_0\,(t_1 + t_2) + mgh = 11\,000\,\mathrm{W} \cdot (480\,\mathrm{s} + 240\,\mathrm{s}) + 1\,300\,\mathrm{kg} \cdot 10\,\mathrm{N/kg} \cdot 576\,\mathrm{m} \doteq 15{,}4\,\mathrm{MJ}.$$

Jiné řešení: Celkovou práci lze určit i podle výkonů motoru na jednotlivých úsecích; potom

$$W = P_0 t_1 + P t_2 = 11\,000\,\mathrm{W} \cdot 480\,\mathrm{s} + 42\,200\,\mathrm{W} \cdot 240\,\mathrm{s} \doteq 15{,}4\,\mathrm{MJ}.$$

2 body

FO57E2–3: Čištění mrazicího boxu

a) K roztání ledu o hmotnosti $m = 2{,}3\,\mathrm{kg}$ je nutno dodat teplo $Q = ml_\mathrm{t} = 2{,}3\,\mathrm{kg} \cdot 334\,\mathrm{kJ} \doteq 768\,\mathrm{kJ}$. Voda o objemu 6,5 l, tedy o hmotnosti $m_1 = 1\,000\,\mathrm{kg/m^3} \cdot 0{,}006\,5\,\mathrm{m^3} = 6{,}5\,\mathrm{kg}$, při ochlazení z teploty $t_1 = 20\,^\circ\mathrm{C}$ na teplotu $t = 0\,^\circ\mathrm{C}$ může poskytnout teplo $Q_1 = m_1 c\,(t_1 - t) = 6{,}5\,\mathrm{kg} \cdot 4\,180\,\mathrm{J/(kg \cdot {}^\circ C)} \cdot 20\,^\circ\mathrm{C} \doteq 543\,\mathrm{kJ} < Q$, to znamená, že voda k roztání veškerého ledu nestačí. Teplo stačí k roztání ledu o hmotnosti

$$m_2 = \frac{Q_1}{l_\mathrm{t}} = \frac{543\,\mathrm{kJ}}{334\,\mathrm{kJ}} \doteq 1{,}63\,\mathrm{kg}.$$

Neroztátý led má hmotnost $2{,}3\,\mathrm{kg} - 1{,}63\,\mathrm{kg} = 0{,}67\,\mathrm{kg}$. **4 body**

b) Hledaná hmotnost m_3 vody o teplotě $t_3 = 100\,^\circ\mathrm{C}$ musí splňovat podmínku $m_3 c\,(t_3 - t) = Q$; z rovnice plyne

$$m_3 = \frac{Q}{c\,(t_3 - t)} = \frac{768\,000\,\mathrm{J}}{4\,180\,\mathrm{J/(kg \cdot {}^\circ C)}\,(100\,^\circ\mathrm{C} - 0\,^\circ\mathrm{C})} \doteq 1{,}8\,\mathrm{kg},$$

tedy do nádoby musíme přilít přibližně 1,8 l vroucí vody. **3 body**

c) Hledaná teplota t_4 vody o objemu 4,7 l, a tedy o hmotnosti $m_4 = 4{,}7\,\mathrm{kg}$, musí splňovat podmínku $m_4 c\,(t_4 - t) = Q$. Z této rovnice podobně jako v předchozím bodě plyne

$$t_4 = t + \frac{Q}{m_4 c} = 0\,^\circ\mathrm{C} + \frac{768\,000\,\mathrm{J}}{4{,}7\,\mathrm{kg} \cdot 4\,180\,\mathrm{J/(kg \cdot {}^\circ C)}} \doteq 39\,^\circ\mathrm{C}.$$ **3 body**

FO57E2–4: Žárovka ze staré svítilny

a) Napětí na připojeném rezistoru musí být $U_1 = 8{,}4\,\mathrm{V} - 6\,\mathrm{V} = 2{,}4\,\mathrm{V}$. Hledaný odpor rezistoru je

$$R = \frac{2{,}4\,\mathrm{V}}{0{,}15\,\mathrm{A}} = 16\,\Omega.$$

2 body

b) Příkon dodávaný zdrojem do obvodu $P_0 = 8{,}4\,\mathrm{V} \cdot 0{,}15\,\mathrm{A} = 1{,}26\,\mathrm{W}$, příkon přijímaný rezistorem $P_\mathrm{R} = 2{,}4\,\mathrm{V} \cdot 0{,}15\,\mathrm{A} = 0{,}36\,\mathrm{W}$. Rezistor spotřebovává část

$$k_\mathrm{R} = \frac{P_\mathrm{R}}{P_0} = \frac{0{,}36\,\mathrm{W}}{1{,}26\,\mathrm{W}} \doteq 0{,}29 = 29\,\%$$

energie dodávané zdrojem. **2 body**

c) Žárovka má příkon $P_\mathrm{ž} = 6\,\mathrm{V} \cdot 0{,}15\,\mathrm{A} = 0{,}9\,\mathrm{W}$. Energii $1\,\mathrm{kWh} = 3\,600\,000\,\mathrm{J}$ spotřebuje za dobu

$$t = \frac{3\,600\,000\,\mathrm{J}}{0{,}9\,\mathrm{W}} = 4\,000\,000\,\mathrm{s} \doteq 1\,100\,\mathrm{h}.$$

2 body

d) i) Zvětší se odpor obvodu, na žárovku připadne menší napětí, bude svítit méně.
ii) Zmenší se odpor obvodu, na žárovku připadne větší napětí, bude svítit více (podle skutečného napětí na žárovce a doby zapojení může dojít k přepálení vlákna).
iii) Zmenší se odpor mezi uzly žárovky, zmenší se napětí mezi nimi, bude svítit méně.
iv) Na původní větvi se napětí nezmění, žárovka bude svítit stejně.

4 body

Úlohy připravila komise pro výběr úloh při ÚKFO České republiky ve složení P. Kabrhel, M. Křížová, M. Maňásková, R. Polma, J. Pulíček a L. Richterek ve spolupráci s J. Thomasem a autorem úloh J. Jírů.